

Foglio di Calcolo 7

Prof. Lorian Storch

loriano@storch.org | <https://www.storch.org/>

Parte 1

Grafico

Il grafico di una funzione

Il Grafico di una Funzione

Definizione

Il grafico di una funzione è definito come l'insieme di punti del piano cartesiano dato da:

$$\text{Gr}(f) = \{(x, y) \in A \times \mathbb{R} \text{ tale che } y = f(x)\}$$

Luogo Geometrico

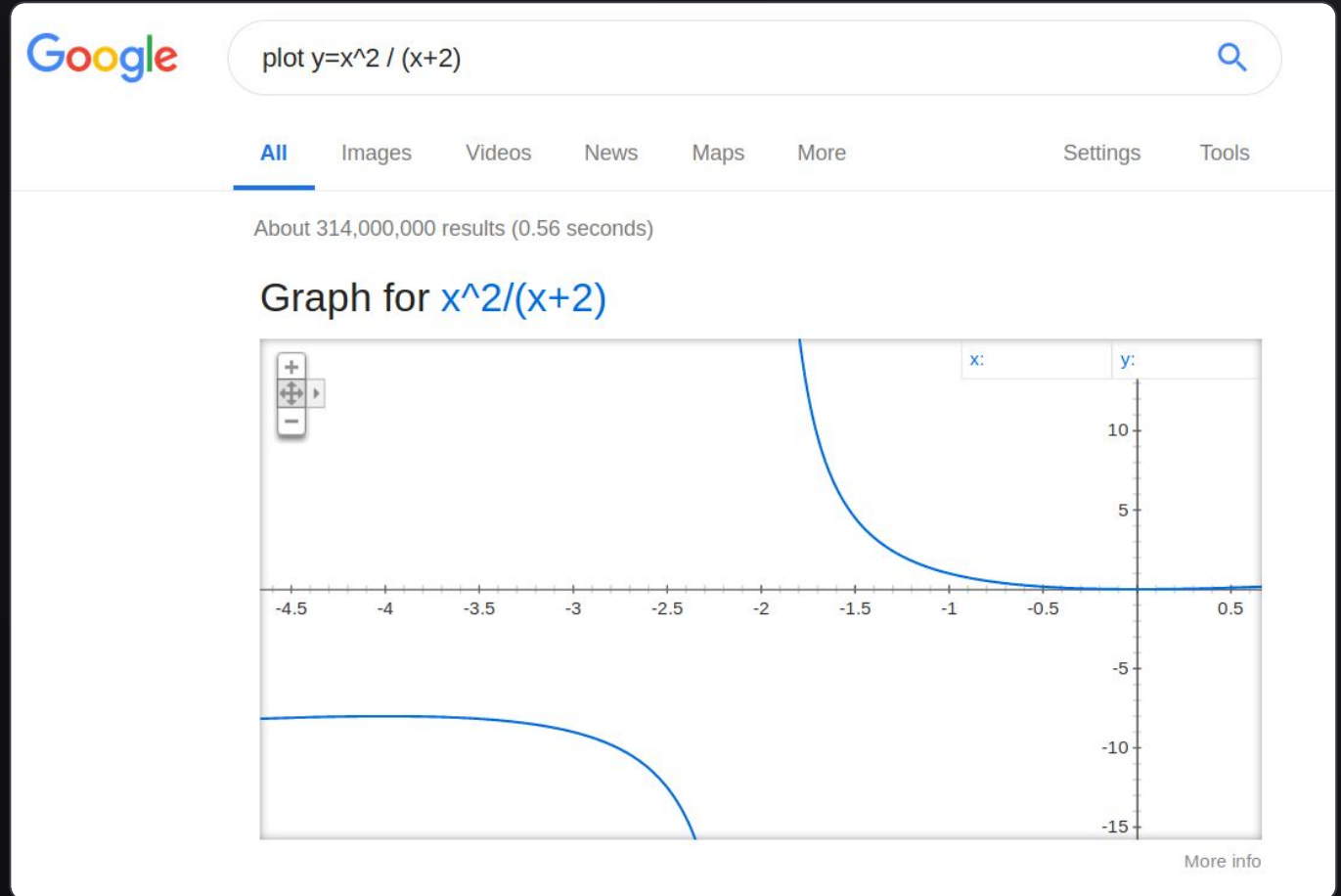
Quindi è il luogo geometrico dei punti del piano per cui a ogni **ascissa** **x** appartenente al dominio della funzione si associa l'**ordinata** **y**.

Un Grafico con Google

Ricerca

Cercando su Google:

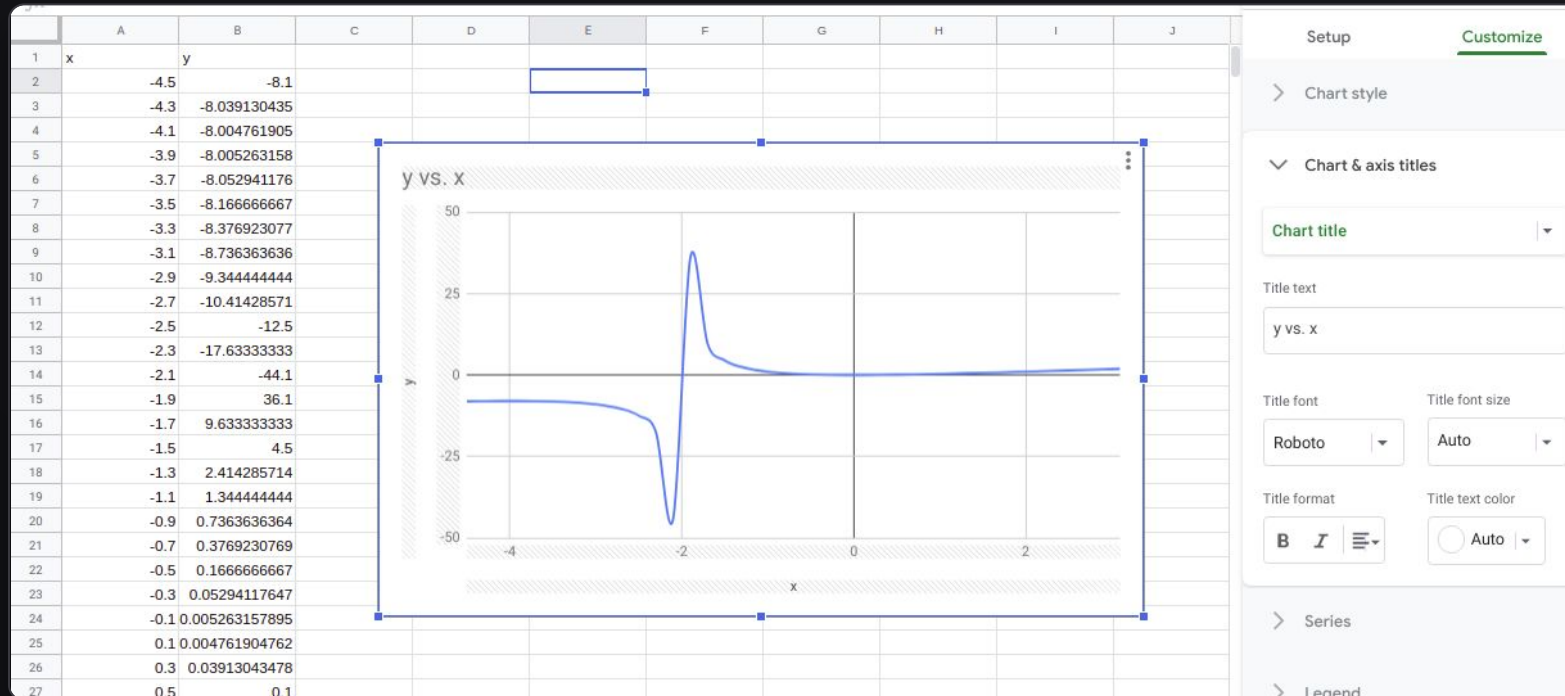
$\text{plot } y=x^2 / (x+2)$



Il Grafico con il Foglio di Calcolo

Già Visto

Fare il grafico con il foglio di calcolo, come in parte abbiamo già visto, è banale.



Parte 2

Derivata

La pendenza della retta tangente

Cos'è la Derivata

Definizione

In matematica, la derivata è la misura di quanto la crescita di una funzione cambi al variare del suo argomento. È una grandezza puntuale: si calcola punto per punto.

Funzioni di Una Variabile

Per le funzioni di nostro interesse, di una variabile reale, è la pendenza della tangente al grafico della funzione: la migliore approssimazione lineare in quel punto.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} := \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

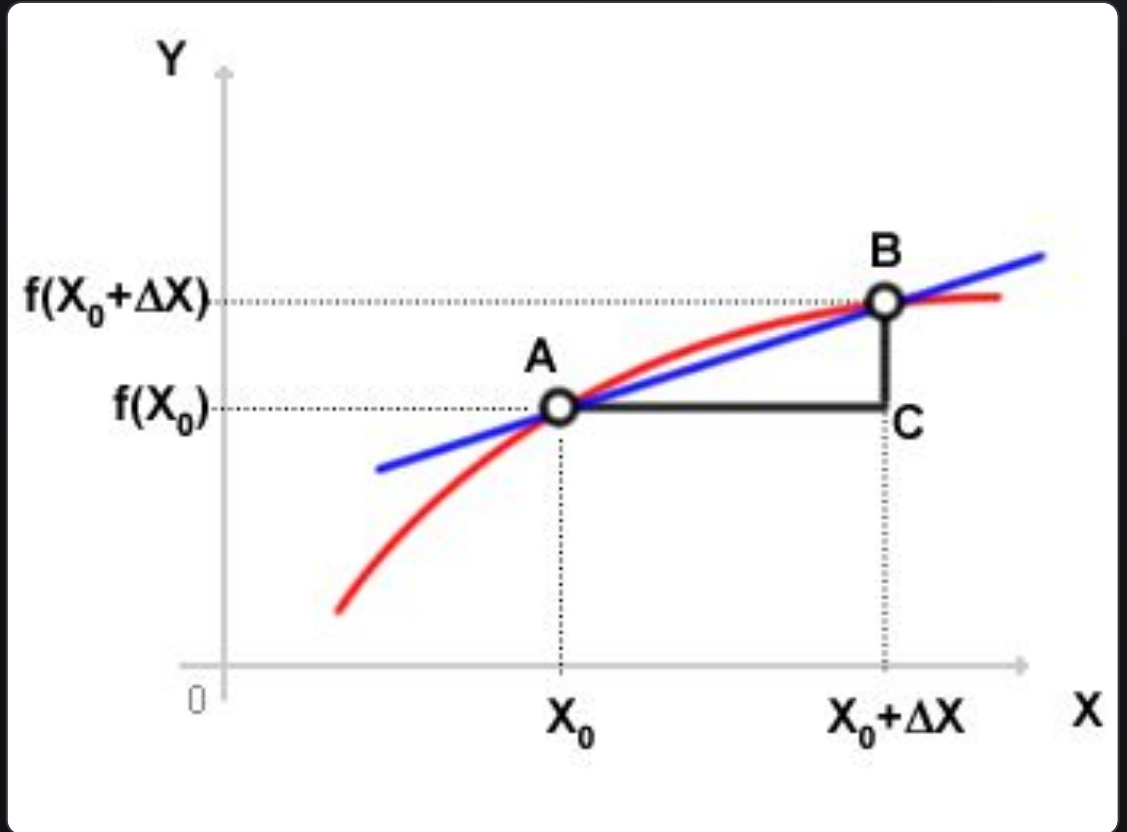
$$f'_-(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Interpretazione Geometrica

Dalla Secante alla Tangente

Il rapporto incrementale è la pendenza della retta che passa per A e B. Quando h tende a 0, B si avvicina ad A e la retta tende alla tangente in A.

$$f'_-(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$



Derivate Fondamentali

La Tabella

Le derivate delle funzioni principali: funzione costante, funzione potenza e alcuni casi particolari.

Funzione	Derivata della funzione
$y = f(x)$	$y' = f'(x)$
funzione costante	
$y = k$	$y' = 0$
funzione potenza	
$y = x^n, n \in \mathbb{R}$	$y' = nx^{n-1}$
in particolare	
$y = x$	$y' = 1$
$y = \frac{1}{x}$	$y' = -\frac{1}{x^2}$
$y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$y = \sqrt[n]{x}$	$y' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$

Parte 3

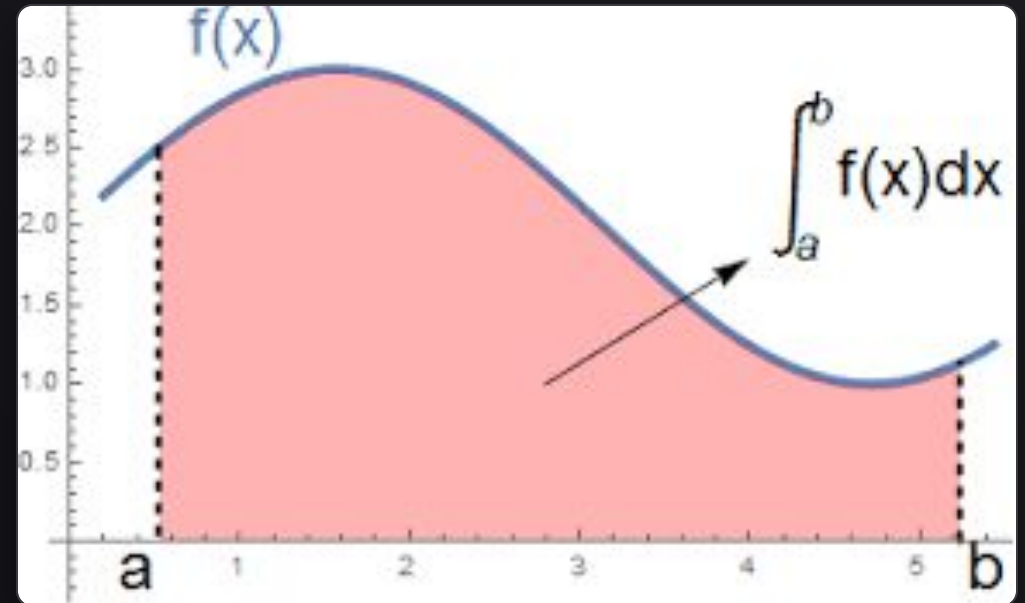
Integrale

L'area sotto la curva

Cos'è l'Integrale

Definizione di Riemann

Possiamo dare una definizione banale di integrale definito secondo Riemann: l'operatore matematico che associa alle funzioni reali di variabile reale l'area sottesa al grafico su un intervallo dato.

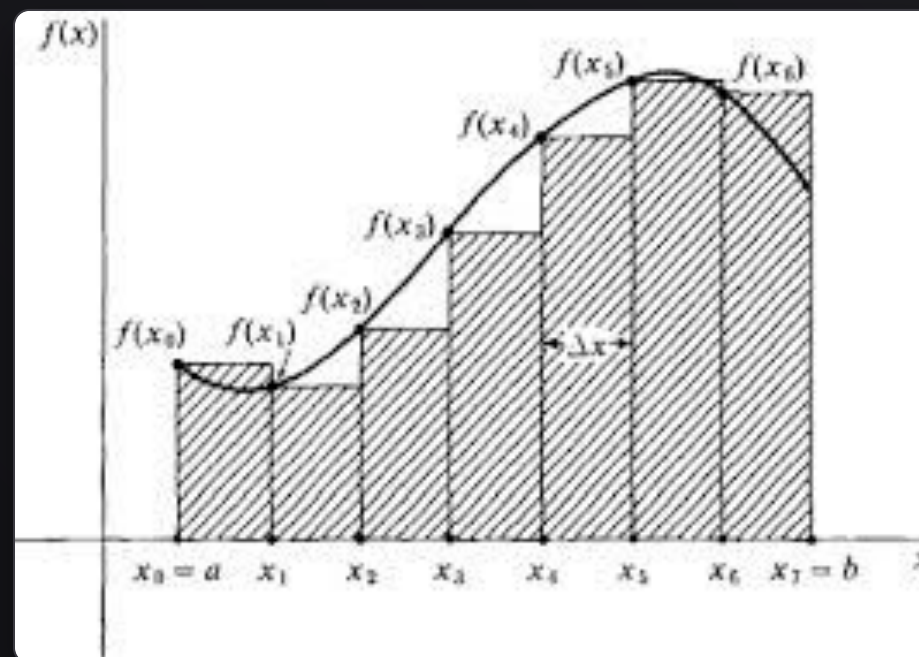


Stimare un Integrale



La Domanda

Possiamo stimare ragionevolmente bene un integrale usando un foglio di calcolo?



Integrali Fondamentali

La Tabella

Definizione, proprietà dell'integrale indefinito, integrali indefiniti fondamentali e integrali notevoli.

Definizione

$$\int f(x) dx = F(x) + c \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$$

Proprietà dell'integrale indefinito

$$\int k \cdot f(x) dx = k \cdot \int f(x) dx$$

$$\int [f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)] dx = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx + \dots + \int f_n(x) dx$$

Integrali indefiniti fondamentali

$$\int f'(x) dx = f(x) + c$$

$$\int a dx = ax + c$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \text{ con } n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \log|x| + c$$

Integrali notevoli

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \log \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + c$$

$$\int \frac{1}{\cos x} dx = \log \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right| + c$$

Unexpected text node: 'o'

Unexpected text node: 'o'

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + c$$

Parte 4

Esempio

Derivata e integrale con il foglio di calcolo

La Funzione di Esempio

La Funzione

Consideriamo ad esempio la funzione:

$$f(x) = 2x^3 + 6x^2 - 12x + 4$$

I Valori di x

In A2 il passo $dx = 0.1$, in B2 il primo valore $x = -5$ e in B3:

=B2+\$A\$2

	A	B
dx		x
	0.1	-5
		-4.9

Generare i Valori di x

Trascinamento

Trasciniamo quindi la formula fino alla riga 102, ottenendo i valori di x fino a 5.

3.3
3.4
3.5
3.6
3.7
3.8
3.9
4
4.1
4.2
4.3
4.4
4.5
4.6
4.7
4.8
4.9
5

Calcolare i Valori di y

La Formula

Adesso calcoliamo il valore di y in C2 e trasciniamo:

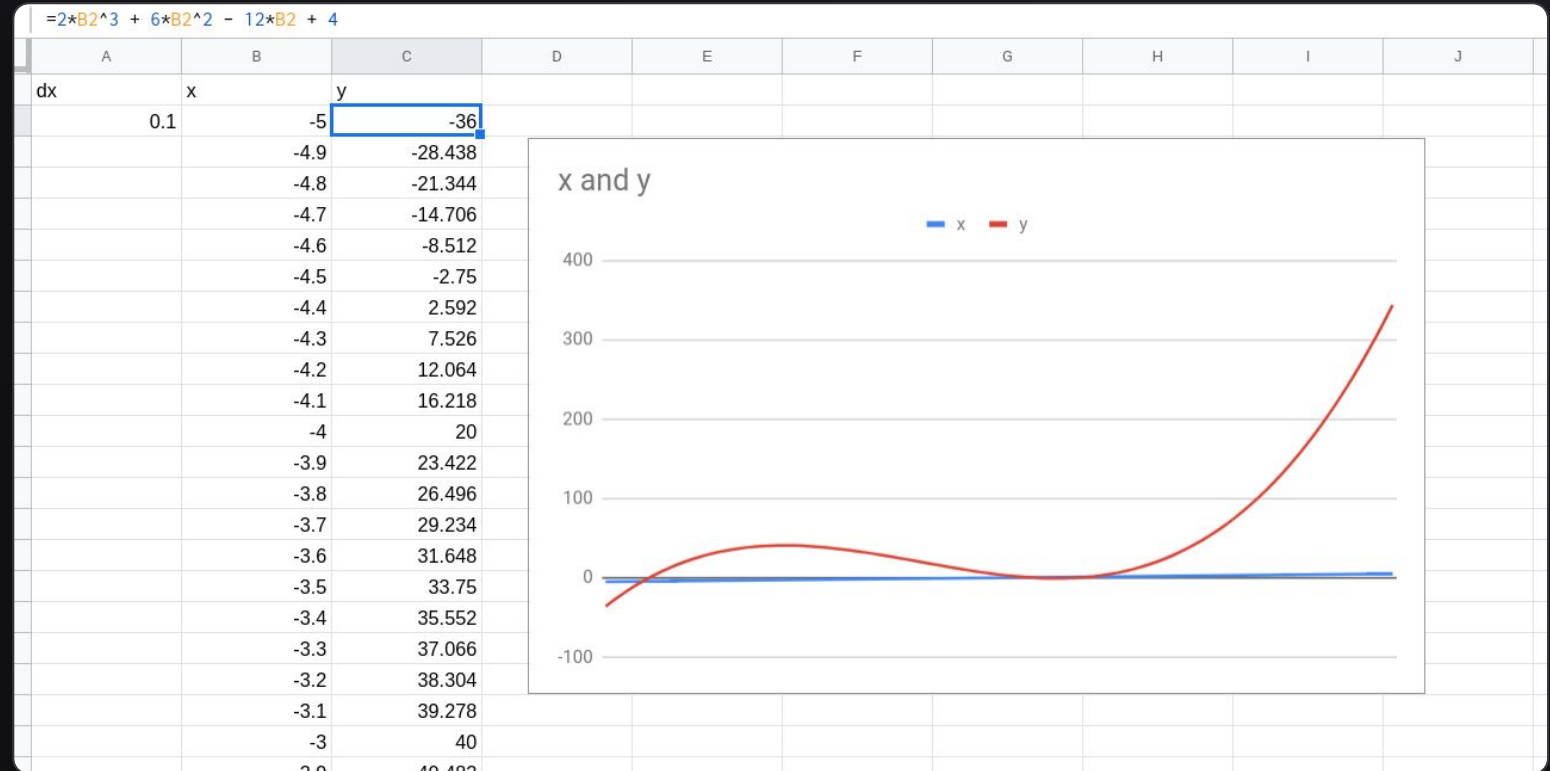
$$=2*B2^3 + 6*B2^2 - 12*B2 + 4$$

$=2*B2^3 + 6*B2^2 - 12*B2 + 4$			
A	B	C	
dx	x	y	
0.1	-5	-36	
	-4.9	-28.438	
	-4.8	-21.344	
	-4.7	-14.706	

Il Grafico della Funzione

Grafico

Possiamo dunque graficare la funzione, con x in ascissa e y in ordinata.



Derivata Numerica

Il Rapporto Incrementale

Possiamo calcolare la derivata semplicemente con la formula:

$$=(C3-C2)/\$A\$2$$

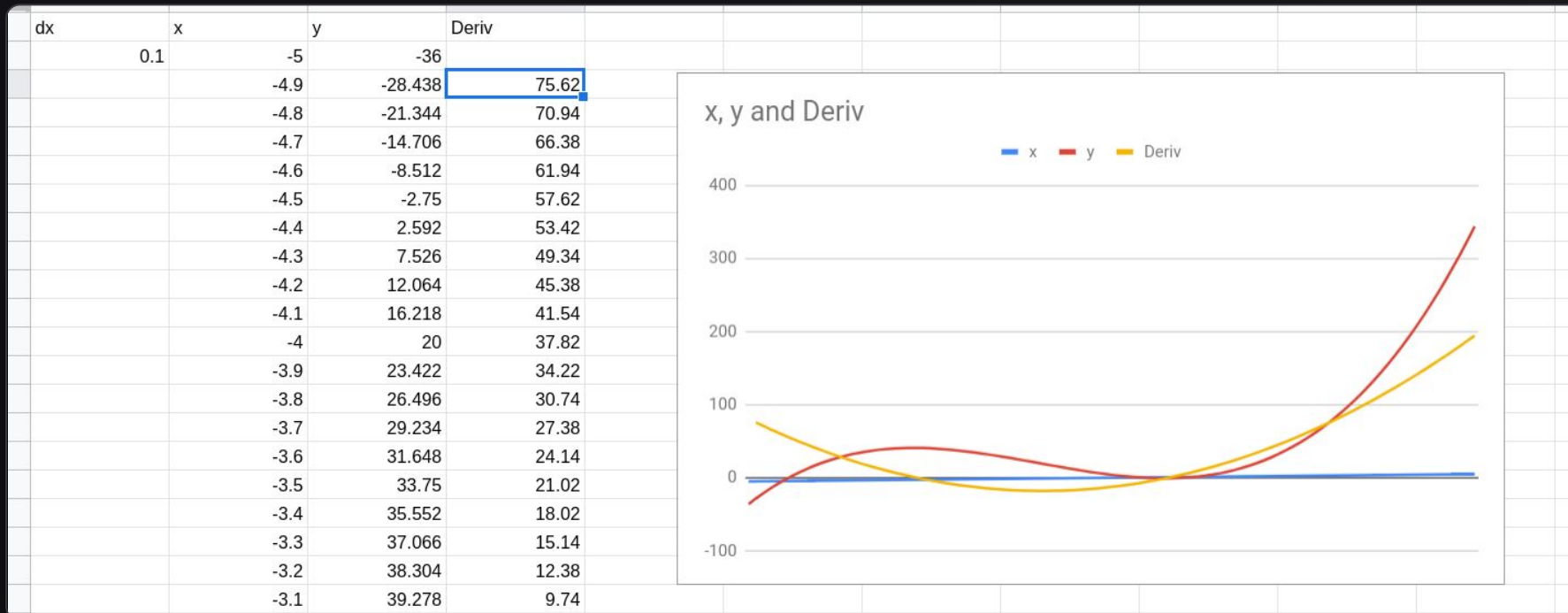
cioè la differenza tra due valori consecutivi di y divisa per dx.

=(C3-C2)/\$A\$2				
A	B	C	D	
dx	x	y	Deriv	
0.1	-5	-36		
	-4.9	-28.438	75.62	
	-4.8	-21.344	70.94	

Funzione e Derivata

Grafico Combinato

Possiamo quindi plottare la funzione e la sua derivata assieme.



Verifica con la Derivata Analitica

Derivata Analitica

È facile fare una verifica usando la derivata analitica, $f'(x) = 6x^2 + 12x - 12$:

$$=(B2^2)*6 + 12*B2-12$$

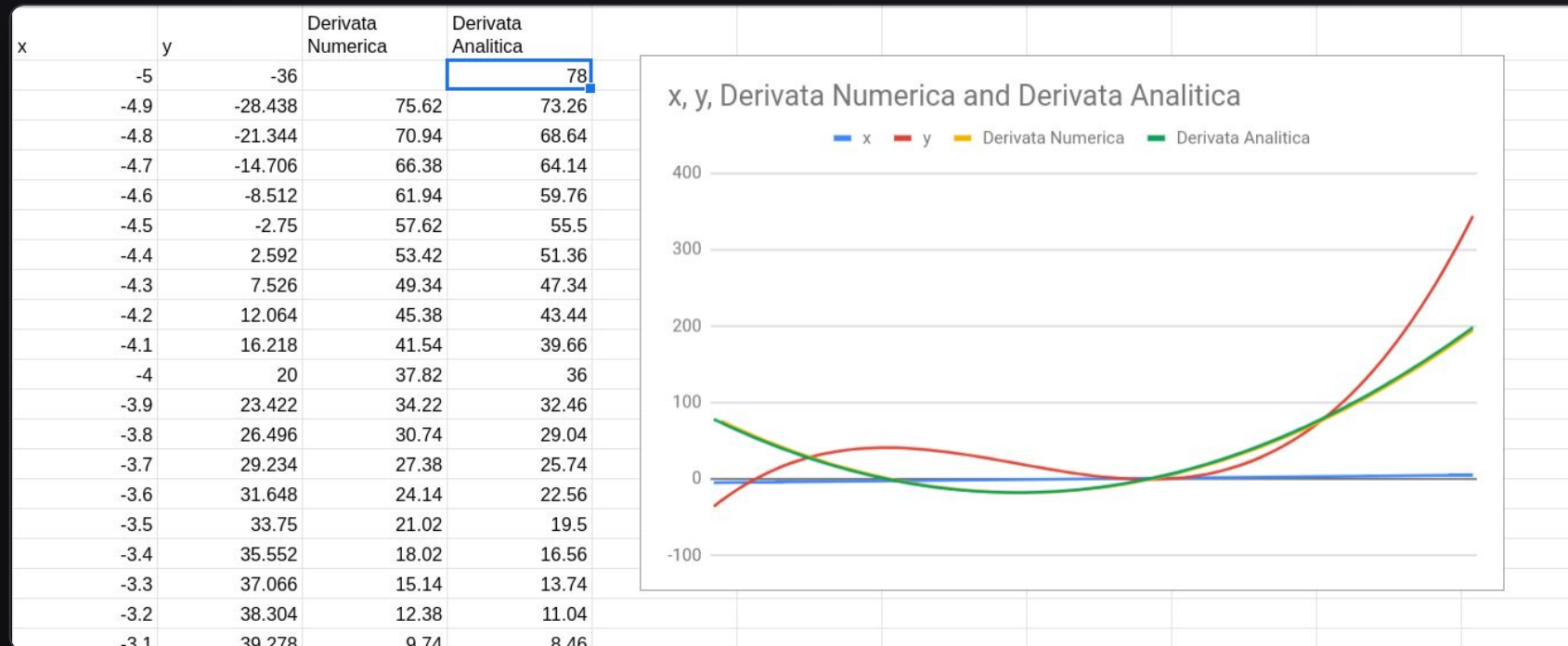
$$=(B2^2)*6 + 12*B2-12$$

A	B	C	D	E
dx	x	y	Derivata Numerica	Derivata Analitica
0.1	-5	-36		78
	-4.9	-28.438	75.62	73.26
	-4.8	-21.214	70.94	68.64

Derivata Numerica e Analitica

Il Confronto

Riportando sul grafico la derivata numerica e quella analitica, le due curve risultano molto vicine.



Somme di Riemann



Area sotto la Curva

Calcolare l'integrale definito corrisponde al calcolo dell'area sottesa alla curva.



Rettangoli

Usiamo un metodo di approssimazione noto come somme di Riemann: disegniamo molti rettangoli che approssimano la forma della curva. Sommando l'area di ciascun rettangolo conosciamo, più o meno, l'area sotto la curva.

L'Area di Ogni Rettangolo

Base per Altezza

Possiamo dunque determinare l'area di ogni rettangolo, moltiplicando y per dx :

`=C2*$A$2`

	A	B	C	D	E	F
1	dx	x	y	Derivata Numerica	Derivata Analitica	
2	0.1	-5	-36		78	-3.6
3		-4.9	-28.438	75.62	73.26	

La Somma delle Aree

Sommatoria

A seguire, banalmente, la sommatoria delle aree dei rettangoli:

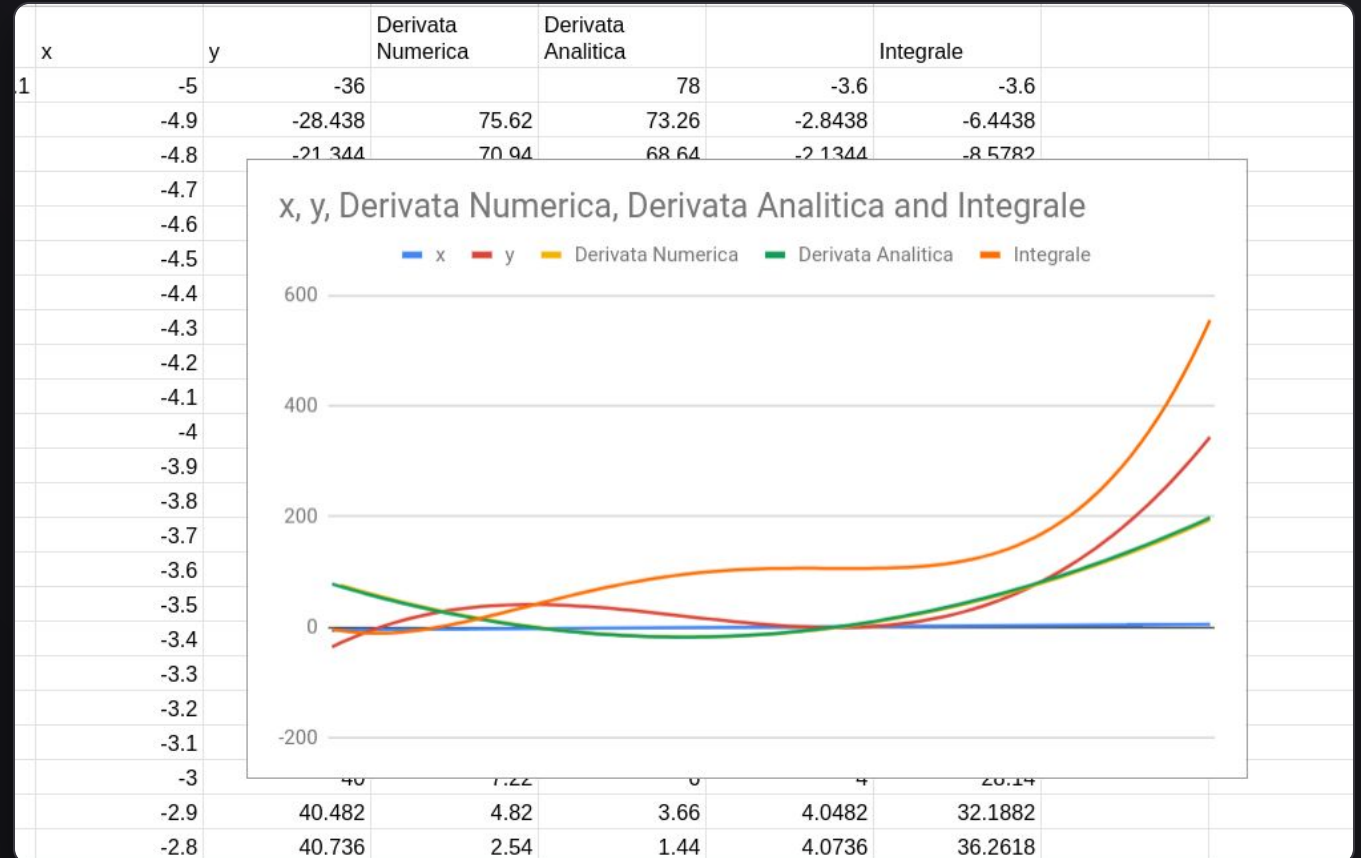
```
=SUM($F$2:F3)
```

	E	F	G	H
1	Deriv Analitica		Integrale	
2	78	-3.6	-3.6	
3	73.26	-2.8438	-6.4438	
4	68.64	-2.1344		
5	64.14	-1.4706		
6	59.76	-0.8512		
7	55.5	-0.275		
8	51.36	0.2592		
9	47.34	0.7526		

L'Integrale nel Grafico

Tutto Insieme

E dunque l'integrale, riportato nel grafico insieme alla funzione e alle due derivate.



Calcolo dell'Integrale Definito

L'Integrale da Calcolare

$$\int_{-2}^3 (2x^3 + 6x^2 - 12x + 4) dx$$

Stima Numerica

Differenza dei valori cumulati tra $x = 3$ (riga 82) e $x = -2$ (riga 32):

$$=G82-G32 \rightarrow 94.575$$

Valore Analitico

Con una funzione custom che calcola la primitiva:

```
function integrale(input)
{
  return ((2.0/4.0)*Math.pow(input, 4.0) +
    (6.0/3.0)*Math.pow(input, 3.0) -
    (12.0/2.0)*Math.pow(input, 2.0)+4.0*input);
}
```

$$=integrale(3)-integrale(-2) \rightarrow 92.5$$