

Introduzione all'Informatica

Loriano Storchi

loriano@storchi.org

<http://www.storchi.org/>



GRAFICO

Studio di funzioni

- Il grafico di una funzione è definito come l'insieme di punti del piano cartesiano dato da:

$$\text{Gr}(f) = \{(x, y) \in A \times \mathbb{R} \text{ tale che } y = f(x)\}$$

- Quindi il luogo geometrico dei punti del piano per cui ogni **ascissa** x appartenente al dominio della funzione si associa **l'ordinata** y

Studio di funzioni

Google

plot $y=x^2 / (x+2)$



All

Images

Videos

News

Maps

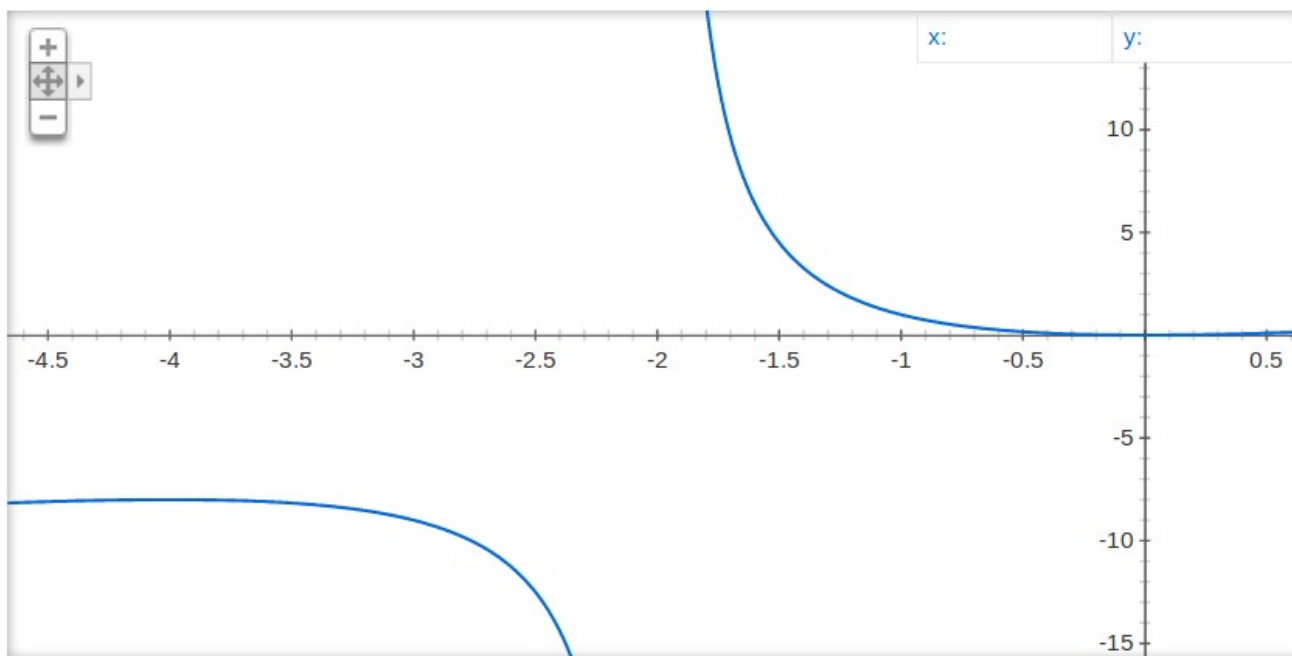
More

Settings

Tools

About 314,000,000 results (0.56 seconds)

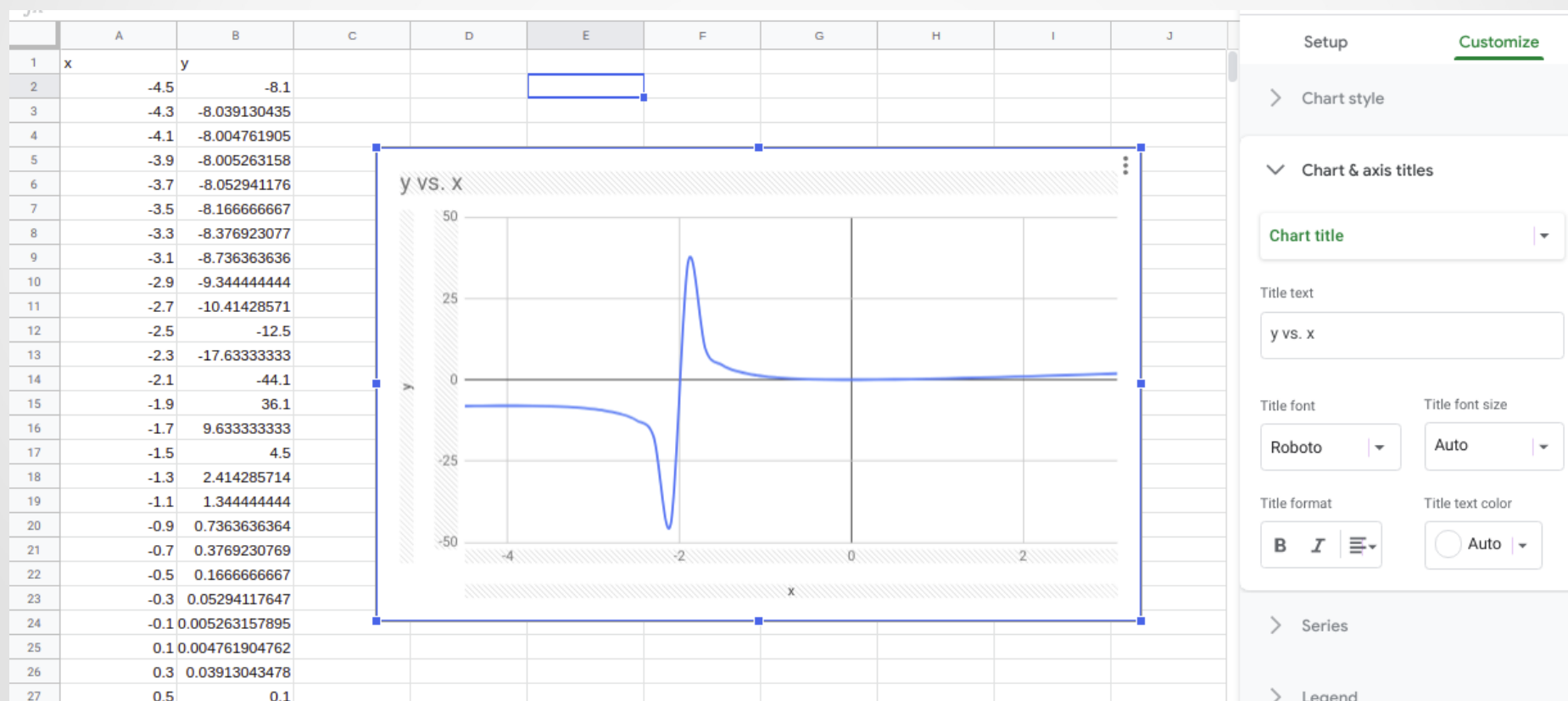
Graph for $x^2/(x+2)$



More info

Studio di funzioni

- Fare il grafico con il foglio di calcolo lo abbiamo in parte già visto e' banale:





DERIVATA

Derivata

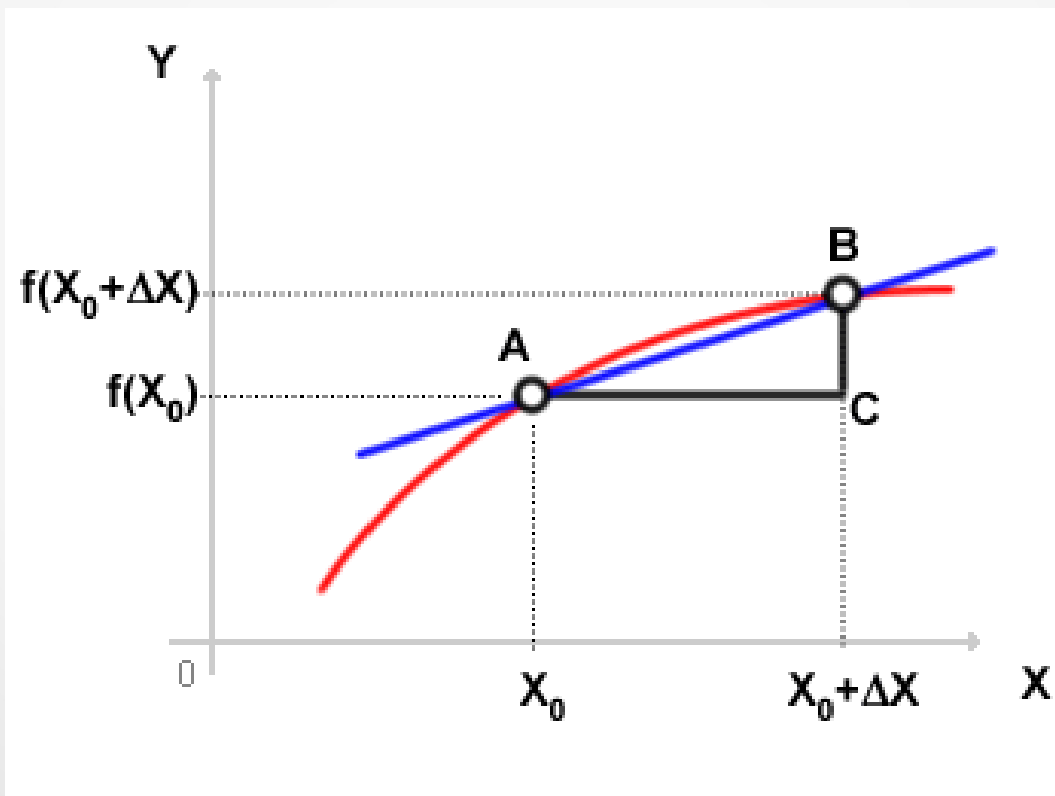
- In matematica, la derivata è la misura di quanto la crescita di una funzione cambi al variare del suo argomento. La derivata di una funzione è una grandezza puntuale, cioè si calcola punto per punto.
- Nel caso di funzioni di nostro interesse funzioni ad una variabile nel campo reale e' la pendenza della tangente al grafico della funzione (la migliore approssimazione lineare in quel punto)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} := \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$$f'_-(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Derivata

$$f'_-(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$



Derivata

Funzione

$$y = f(x)$$

Derivata della funzione

$$y' = f'(x)$$

funzione costante

$$y = k$$

$$y' = 0$$

funzione potenza

$$y = x^n, n \in \mathbb{R}$$

$$y' = nx^{n-1}$$

in particolare

$$y = x$$

$$y' = 1$$

$$y = \frac{1}{x}$$

$$y' = -\frac{1}{x^2}$$

$$y = \sqrt{x}$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$y = \sqrt[n]{x}$$

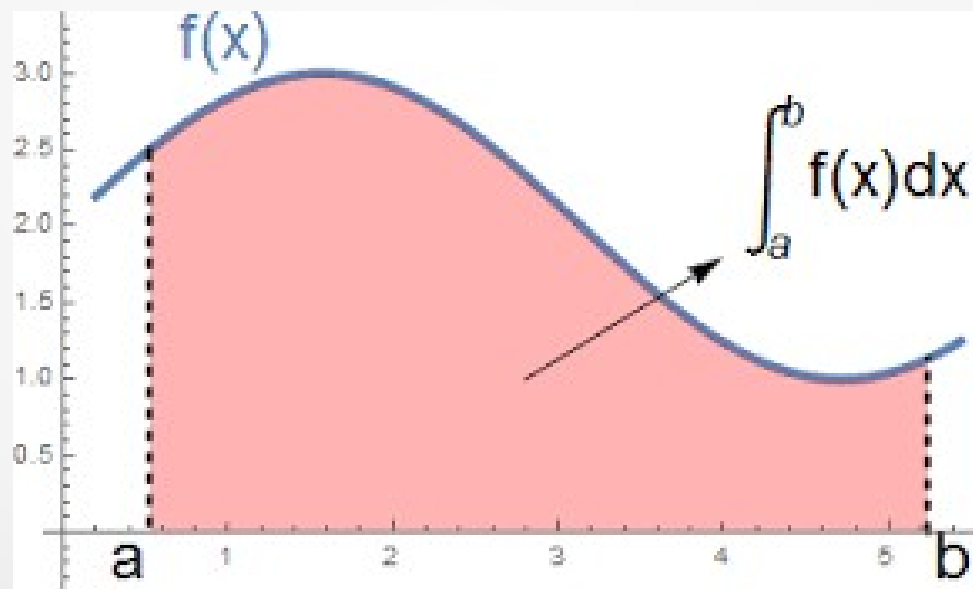
$$y' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$$



INTEGRALE

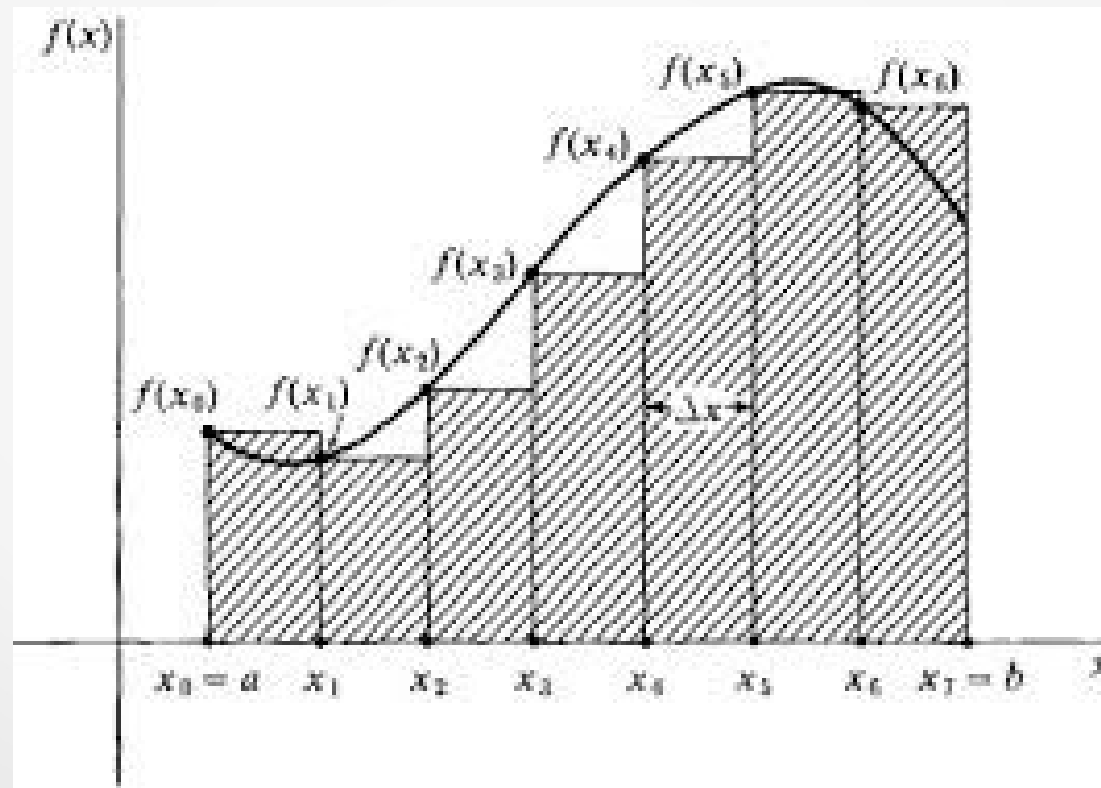
Integrale

- Possiamo dare una definizione banale di integrale definito secondo Riemann , come l'operatore matematico che associa alla funzioni reali di variabili reali l'area sottesa al grafico su un intervallo dato



Integrale

- Posso stimare ragionevolmente bene un integrale usando un foglio di calcolo ?



Integrale

Definizione

$$\int f(x) dx = F(x) + c \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$$

Proprietà dell'integrale indefinito

$$\int k \cdot f(x) dx = k \cdot \int f(x) dx$$

$$\int [f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)] dx = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx + \dots + \int f_n(x) dx$$

Integrali indefiniti fondamentali

$$\int f'(x) dx = f(x) + c$$

$$\int a dx = ax + c$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \text{ con } n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \log|x| + c$$

Integrali notevoli

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \log \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + c$$

$$\int \frac{1}{\cos x} dx = \log \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right| + c$$

Unexpected text node: 'o'

Unexpected text node: 'o'

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + c$$



ESEMPIO

Derivata

- Consideriamo ad esempio la funzione

$$f(x) = 2x^3 + 6x^2 - 12x + 4$$

A	B
dx	x
0.1	-5
	-4.9

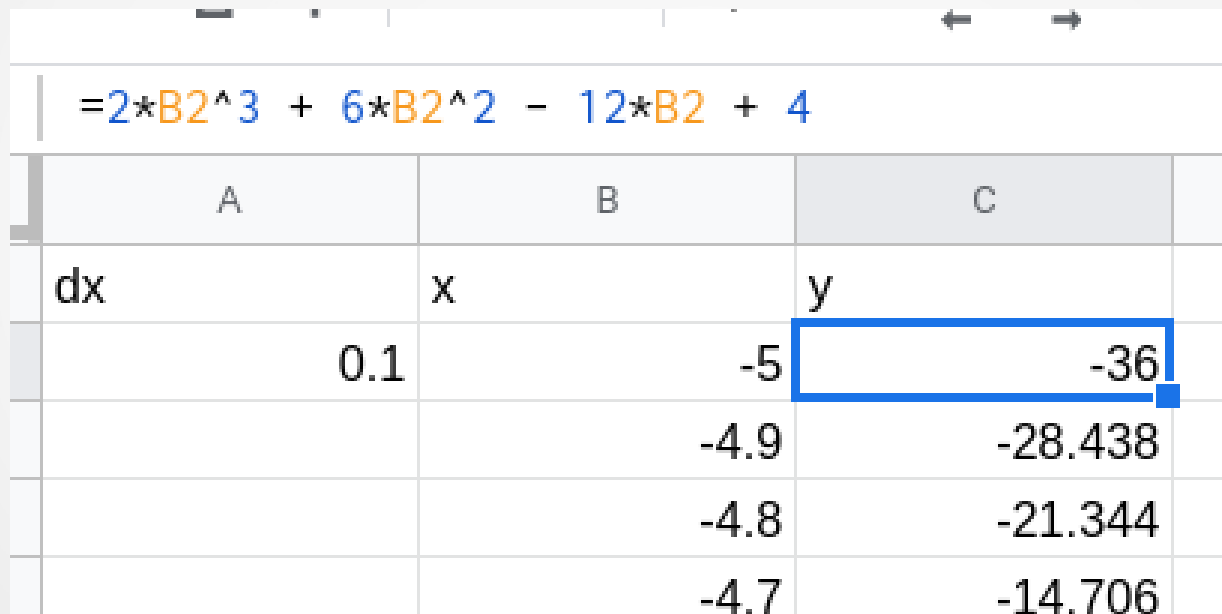
Derivata

- E dunque tracciamo fino a 102 ottenendo:

5		3.3
5		3.4
7		3.5
3		3.6
9		3.7
0		3.8
1		3.9
2		4
3		4.1
4		4.2
5		4.3
5		4.4
7		4.5
3		4.6
9		4.7
0		4.8
1		4.9
2		5
3		
4		
5		

Derivata

- Adesso calcoliamo il valore di Y

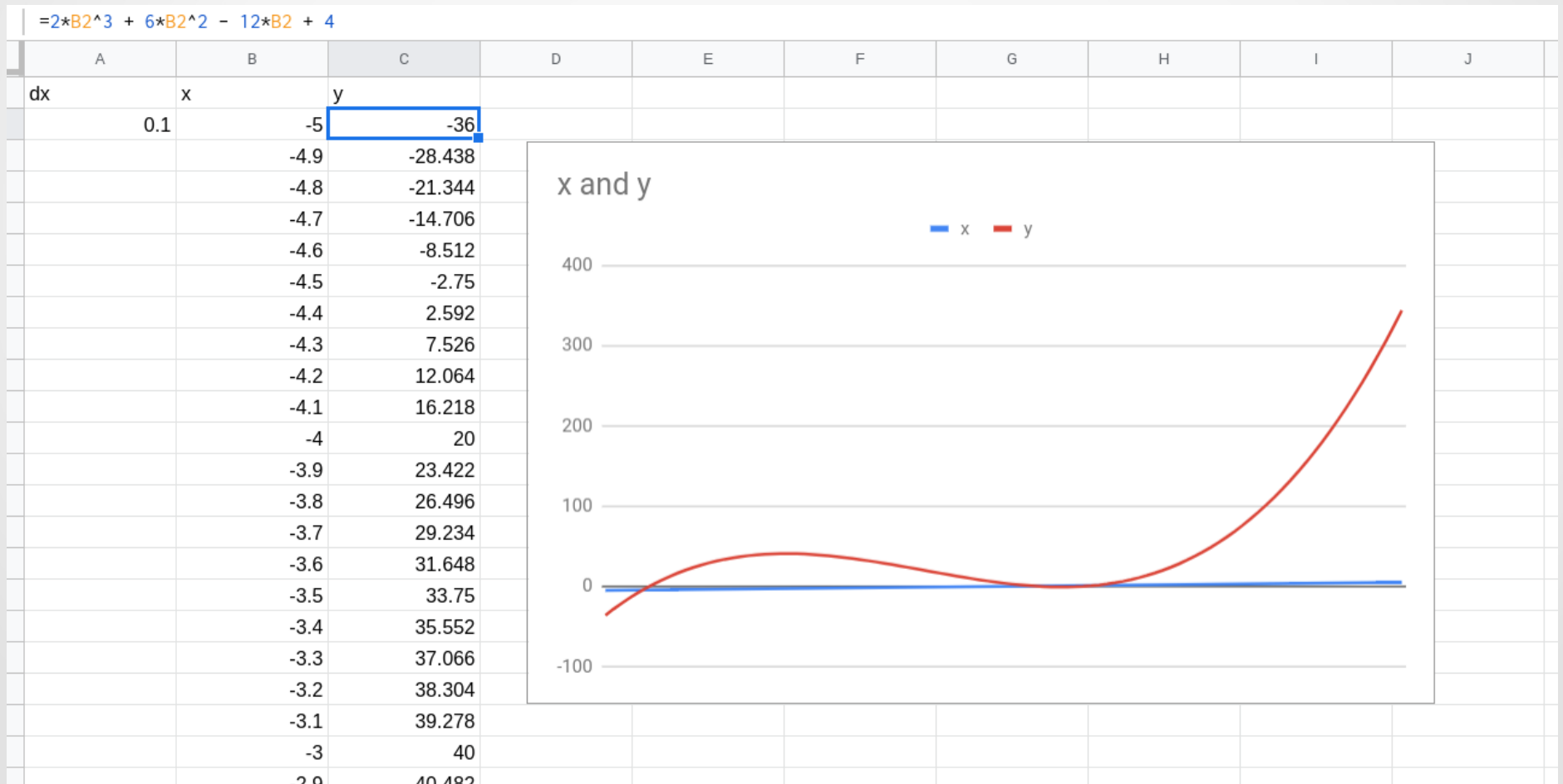


The image shows a screenshot of a spreadsheet application. At the top, a formula bar contains the equation $=2*B2^3 + 6*B2^2 - 12*B2 + 4$. Below the formula bar is a table with three columns labeled A, B, and C. The first row of the table has headers 'dx', 'x', and 'y'. The second row contains the values 0.1, -5, and -36, with the cell containing -36 highlighted with a blue border. The third row contains -4.9 and -28.438. The fourth row contains -4.8 and -21.344. The fifth row contains -4.7 and -14.706.

A	B	C
dx	x	y
0.1	-5	-36
	-4.9	-28.438
	-4.8	-21.344
	-4.7	-14.706

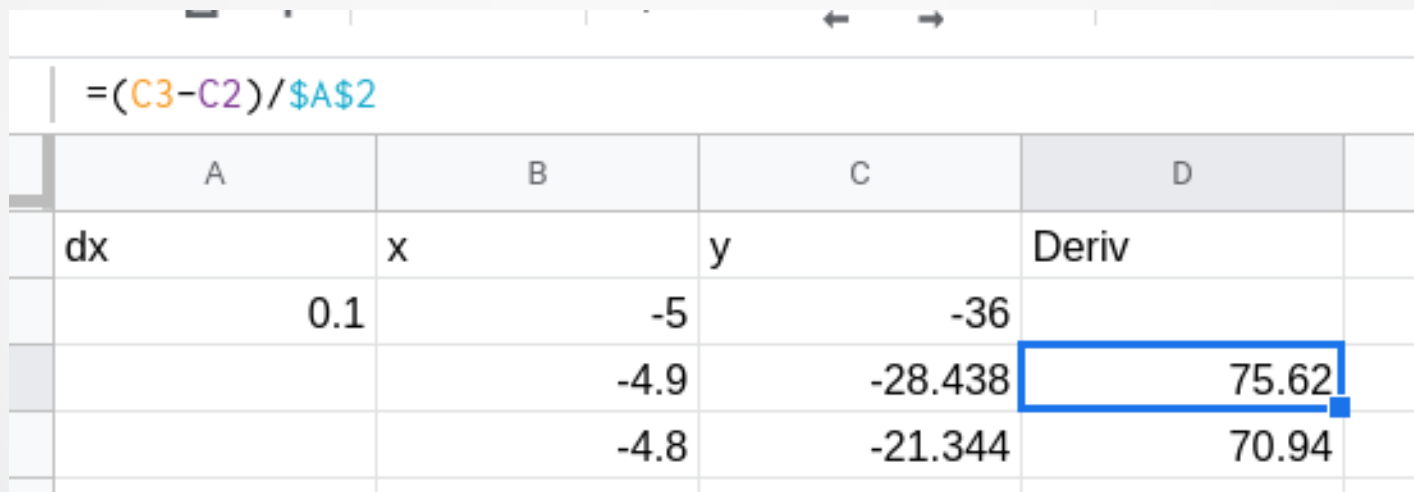
Derivata

- Possiamo dunque graficare



Derivata

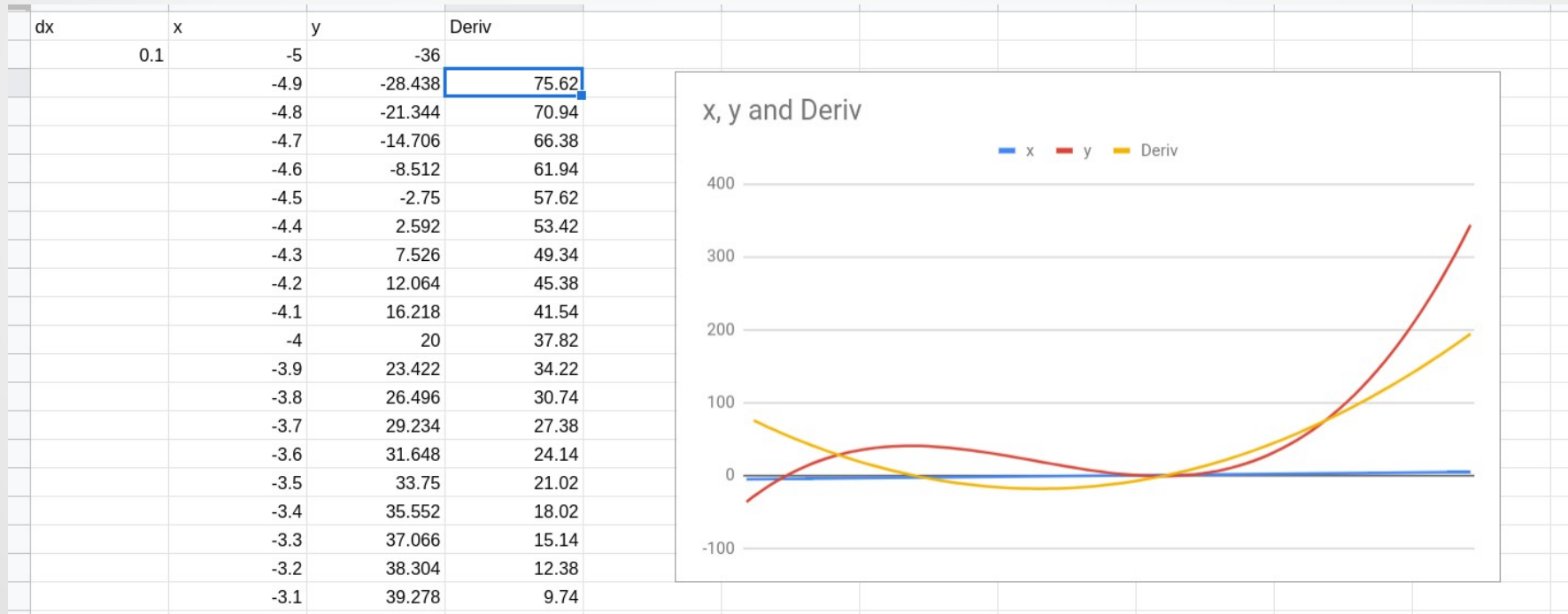
- Possiamo calcolare la derivata semplicemente usando la formula:



A	B	C	D
dx	x	y	Deriv
0.1	-5	-36	
	-4.9	-28.438	75.62
	-4.8	-21.344	70.94

Derivata

- E quindi possiamo plottare funzione e derivata assieme



Derivata

- Facile fare una verifica usando la derivata analitica

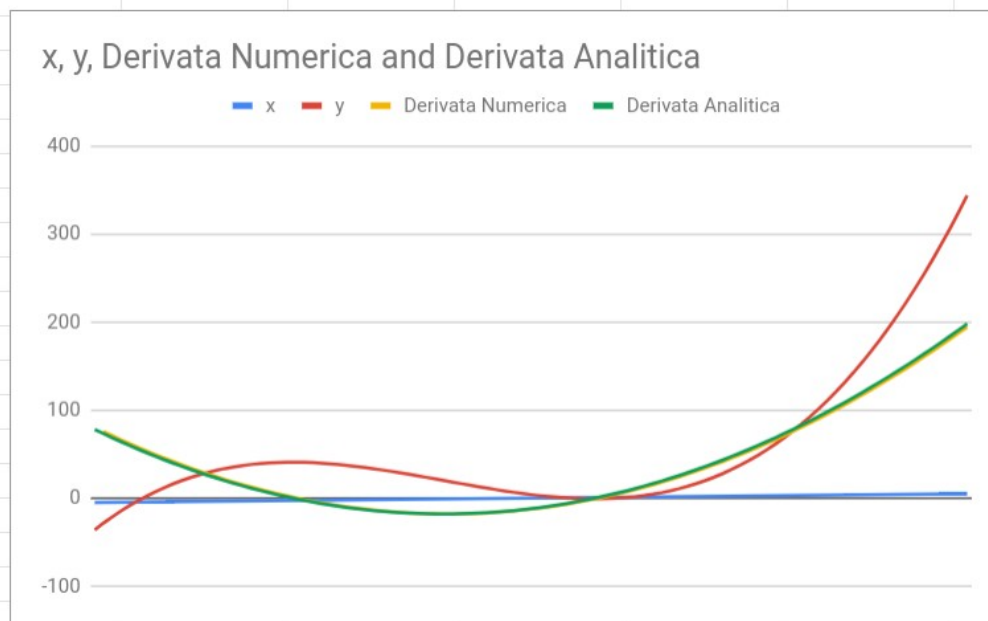
$$=(B^2)^*6 + 12*B^2-12$$

A	B	C	D	E
dx	x	y	Derivata Numerica	Derivata Analitica
0.1	-5	-36		78
	-4.9	-28.438	75.62	73.26
	4.9	21.212	70.04	68.64

Derivata

- Facile fare una verifica usando la derivata analitica

x	y	Derivata Numerica	Derivata Analitica
-5	-36		78
-4.9	-28.438	75.62	73.26
-4.8	-21.344	70.94	68.64
-4.7	-14.706	66.38	64.14
-4.6	-8.512	61.94	59.76
-4.5	-2.75	57.62	55.5
-4.4	2.592	53.42	51.36
-4.3	7.526	49.34	47.34
-4.2	12.064	45.38	43.44
-4.1	16.218	41.54	39.66
-4	20	37.82	36
-3.9	23.422	34.22	32.46
-3.8	26.496	30.74	29.04
-3.7	29.234	27.38	25.74
-3.6	31.648	24.14	22.56
-3.5	33.75	21.02	19.5
-3.4	35.552	18.02	16.56
-3.3	37.066	15.14	13.74
-3.2	38.304	12.38	11.04
-3.1	39.278	9.74	8.46



Integrale

- Abbiamo detto che calcolare l'integrale definito corrisponde al calcolo dell'area sottesa sotto la curva
- Trovare l'area usando un metodo di approssimazione noto come somme di Riemann. Fondamentalmente stiamo disegnando molti di rettangoli che approssimano la forma della nostra curva. Se sommiamo l'area di ciascun rettangolo, conosciamo (più o meno) l'area sotto la curva.

Integrale

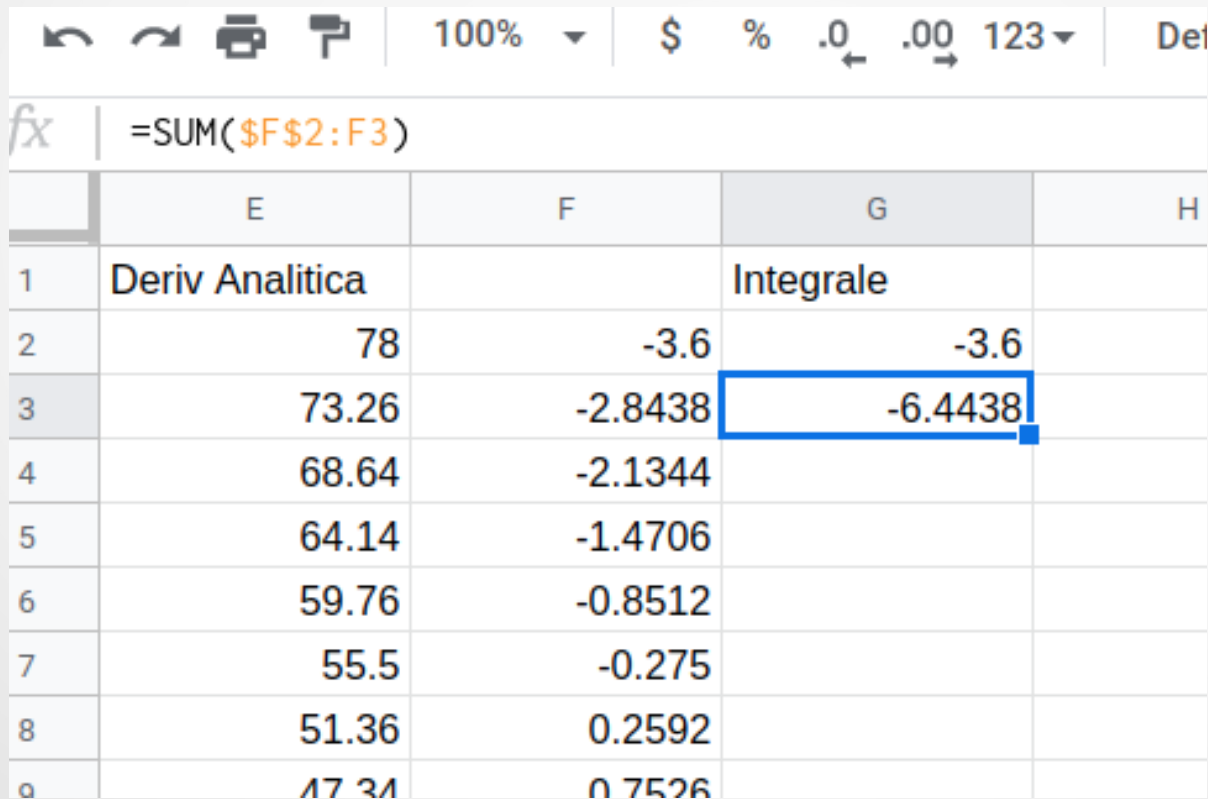
- Possiamo dunque determinare l'area di ogni rettangolo

fx | =C2*\$A\$2

	A	B	C	D	E	F
1	dx	x	y	Derivata Numerica	Derivata Analitica	
2	0.1	-5	-36		78	-3.6
3		-4.9	-28.438	75.62	73.26	

Integrale

- Ed a seguire banalmente la sommatoria delle aree dei rettangoli



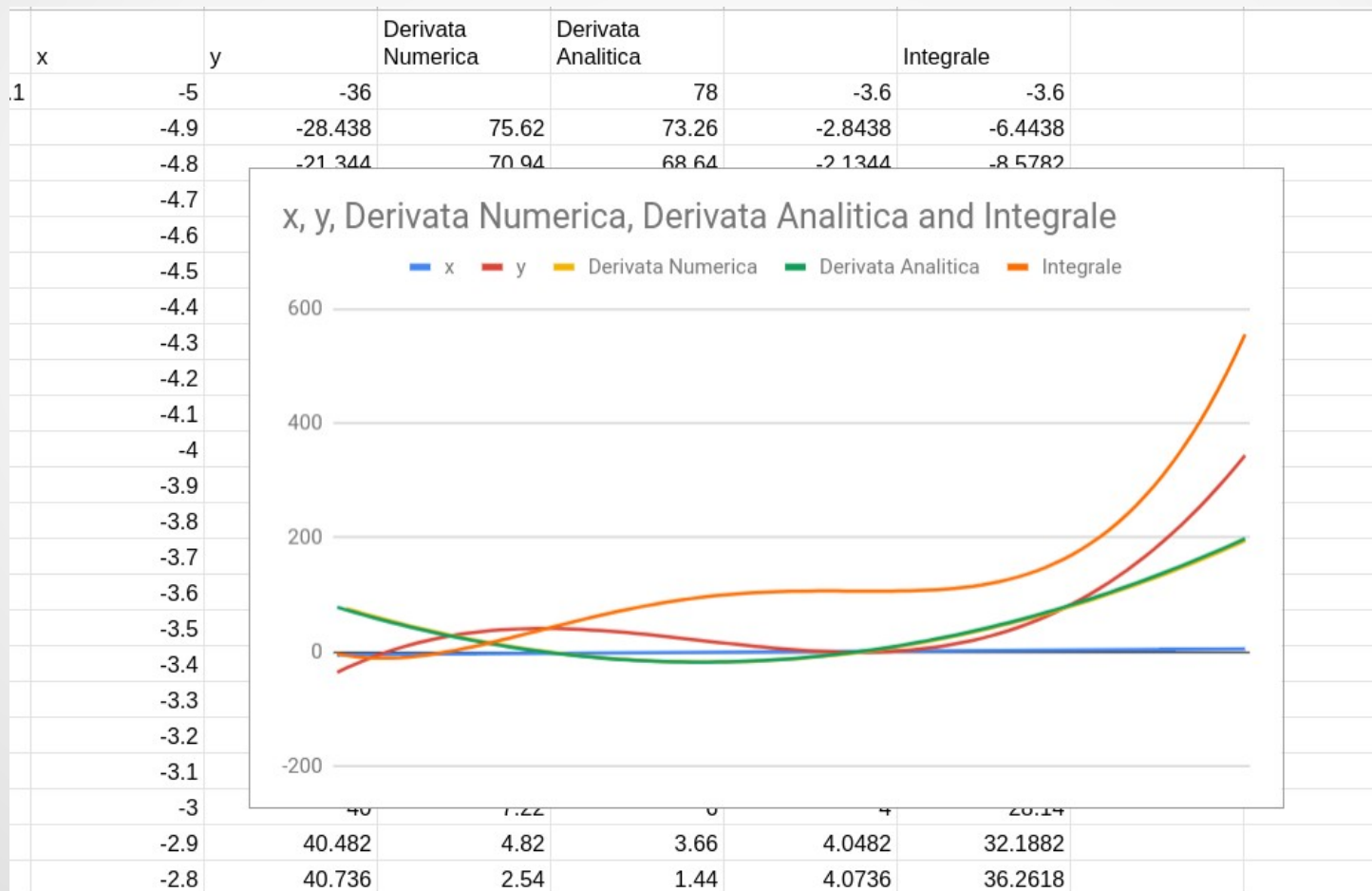
The screenshot shows an Excel spreadsheet with the following data:

	E	F	G	H
1	Deriv Analitica		Integrale	
2	78	-3.6	-3.6	
3	73.26	-2.8438	-6.4438	
4	68.64	-2.1344		
5	64.14	-1.4706		
6	59.76	-0.8512		
7	55.5	-0.275		
8	51.36	0.2592		
9	47.34	0.7526		

The formula bar shows the formula: `=SUM(F2:F3)`

Integrale

- E dunque l'integrale ad esempio



Integrale

- Vediamo ad esempio il calcolo dell'integrale definito

$$\int_{-2}^3 (2x^3 + 6x^2 - 12x + 4) dx$$

		94.575 x	
-3.6	=G82-G32		
120			

```
function integrale(input)
{
  return ((2.0/4.0)*Math.pow(input, 4.0) +
    (6.0/3.0)*Math.pow(input, 3.0) -
    (12.0/2.0)*Math.pow(input, 2.0)+4.0*input);
}
```

=integrale(3)-integrale(-2)		
A	B	

Analitico
92.5



TEST

Test

- Calcolare la derivata di $f(x) = x^2 + 2$ Punto per punto e

$$\int_{-3}^3 (x^2 + 2) dx$$