Introduzione all'Informatica

Loriano Storchi

loriano@storchi.org

https:://www.storchi.org/

GRAFICO

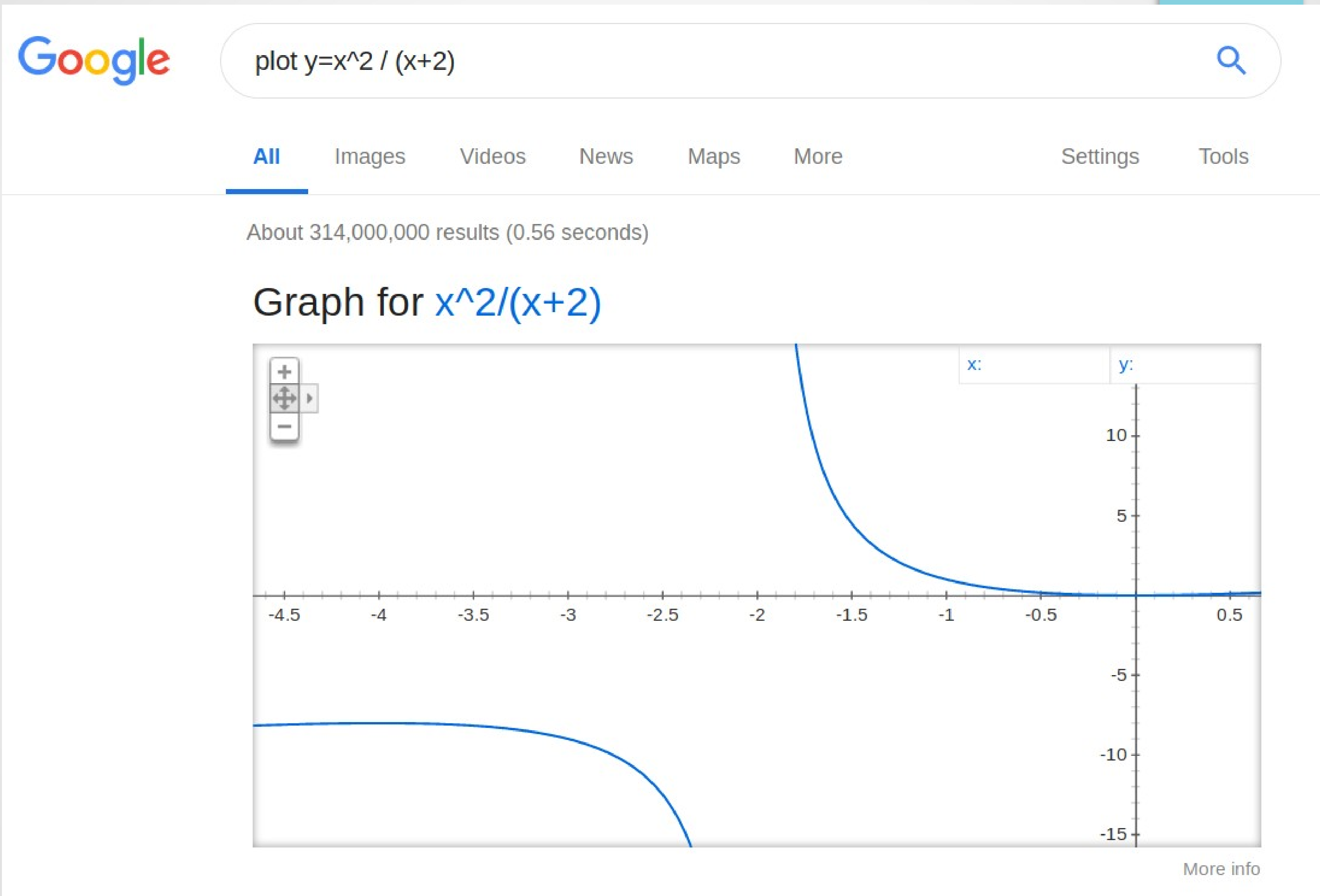
Studio di funzioni

- Il grafico di una funzione è definito come l'insieme di punti del piano cartesiano dato da:

$$\mathrm{Gr}(f) = \{(x, y) \in A \times \mathbb{R} \text{ tale che } y = f(x)\}$$

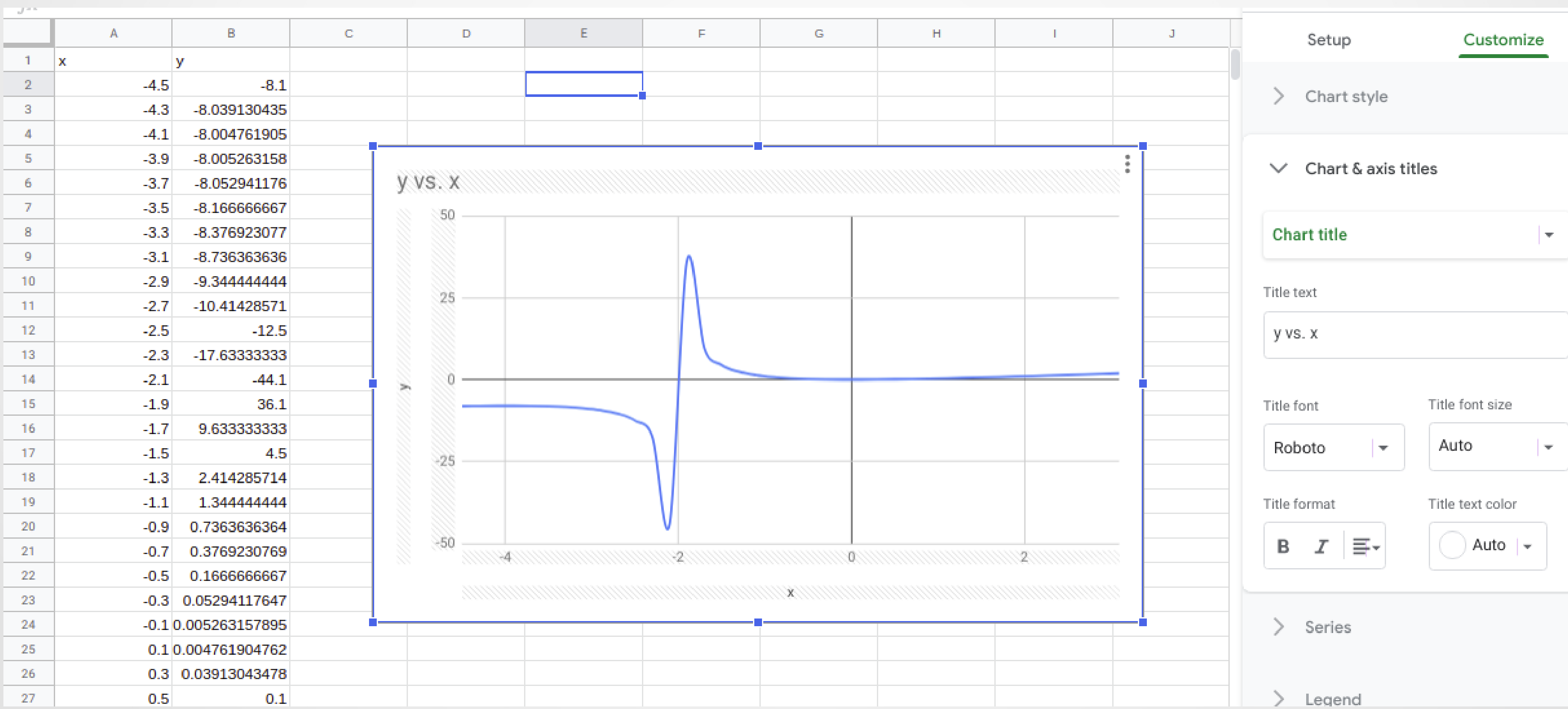
- Quindi il luogo geometrico dei punti del piano per cui ogni **ascissa x** appartenente al dominio della funzione si associa **l'ordinata y**

Studio di funzioni



Studio di funzioni

- Fare il grafico con il foglio di calcolo lo abbiamo in parte già visto e’ banale:



DERIVATA

Derivata

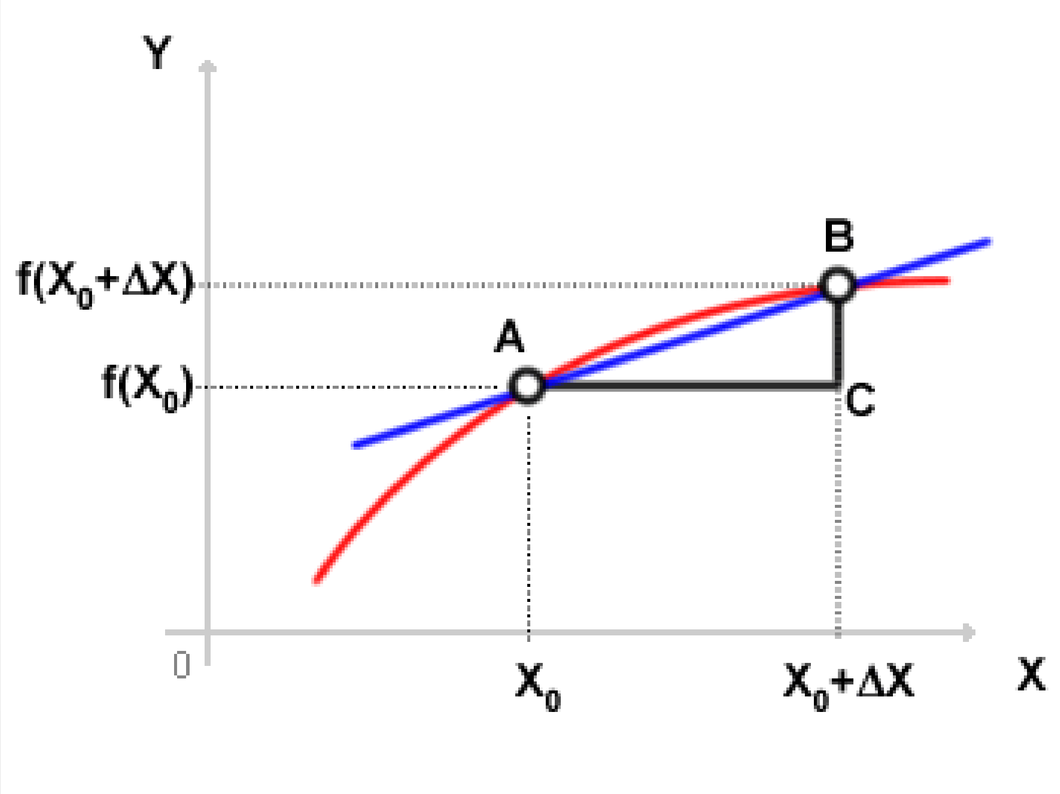
- In matematica, la derivata è la misura di quanto la crescita di una funzione cambi al variare del suo argomento. La derivata di una funzione è una grandezza puntuale, cioè si calcola punto per punto.
- Nel caso di funzioni di nostro interesse funzioni ad una variabile nel campo reale e' la pendenza della tangente al grafico della funzione (la migliore approssimazione lineare in quel punto)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} := \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$$f'_{-}(x_0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Derivata

$$f'_{-}(x_0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$



Derivata: misura la velocità di variazione istantanea di una funzione. Geometricamente, rappresenta la pendenza della retta tangente al grafico della funzione in un punto.

Derivata

Funzione	Derivata della funzione
$y = f(x)$	$y' = f'(x)$
funzione costante	
$y = k$	$y' = 0$
funzione potenza	
$y = x^n, n \in \mathbb{R}$	$y' = nx^{n-1}$
in particolare	
$y = x$	$y' = 1$
$y = \frac{1}{x}$	$y' = -\frac{1}{x^2}$
$y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$y = \sqrt[n]{x}$	$y' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$

INTEGRALE

Integrale

Il Teorema fondamentale del calcolo integrale stabilisce un legame preciso tra derivata e integrale. Esso afferma, in sostanza, che:

- Se deriviamo una funzione integrale, otteniamo la funzione integranda. In altre parole, se prima integriamo una funzione e poi deriviamo il risultato, torniamo alla funzione di partenza.
- L'integrale definito di una funzione può essere calcolato trovando una primitiva della funzione integranda. Una primitiva di una funzione f(x) è una funzione F(x) la cui derivata è uguale a f(x

Integrale

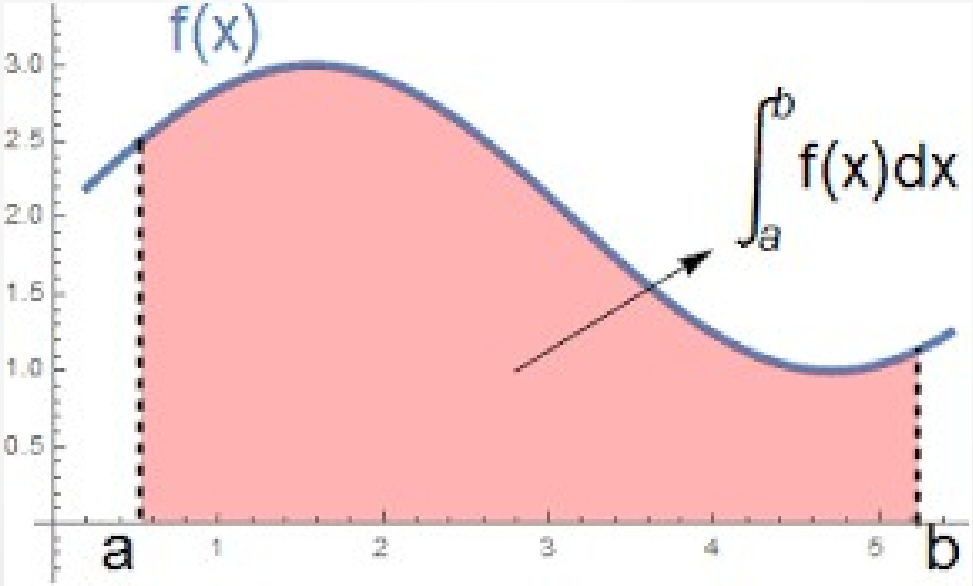
Considera la funzione $f(x) = 2x$.

- Integrazione: L'integrale indefinito di $f(x)$ è $F(x) = x^2 + C$ (dove C è una costante arbitraria).
- Derivazione: Se deriviamo $F(x) = x^2 + C$, otteniamo $f(x) = 2x$.

È importante notare che l'integrale indefinito non restituisce un'unica funzione, ma un insieme di funzioni che differiscono per una costante (la famosa "+ C"). Quindi, la relazione tra derivata e integrale non è un'inversa perfetta come lo è, ad esempio, tra addizione e sottrazione.

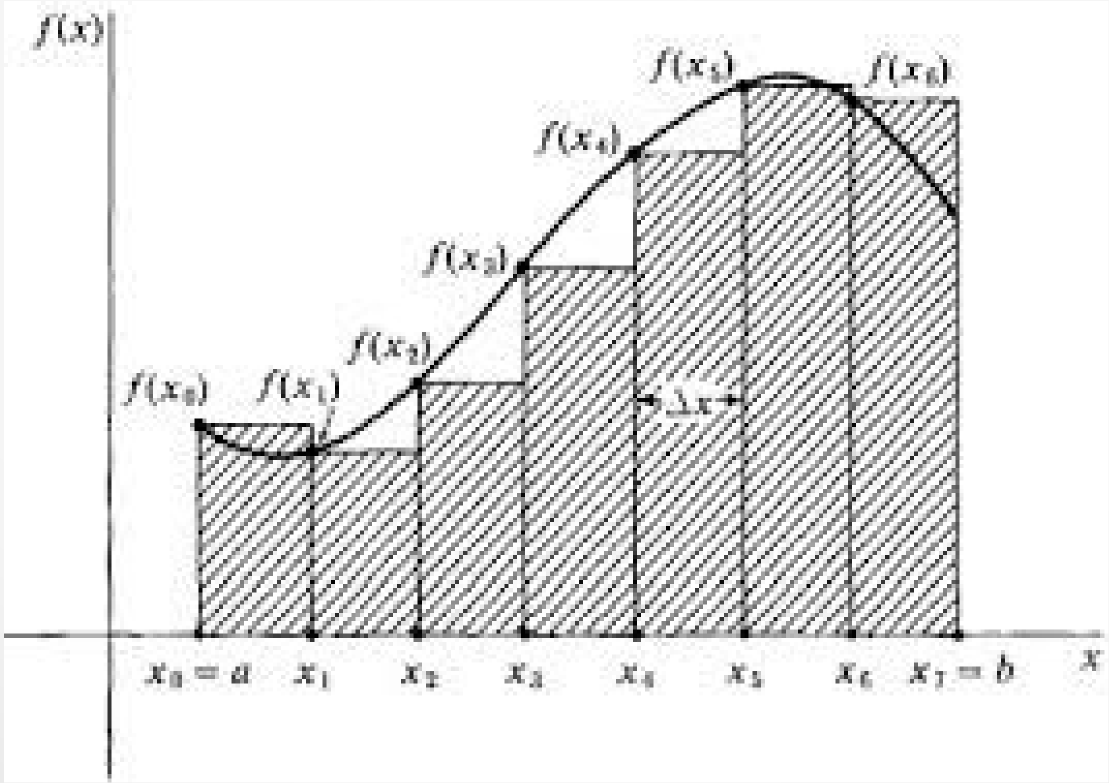
Integrale

- Possiamo dare una definizione banale di integrale definito secondo Riemann, come l’operatore matematico che associa alla funzioni reali di variabili reali l’area sottesa al grafico su un intervallo dato



Integrale

- Posso stimare ragionevolmente bene un integrale usando un foglio di calcolo ?



Integrale

Definizione

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$$

Proprietà dell'integrale indefinito

$$\int k \cdot f(x)\,dx = k \cdot \int f(x)\,dx$$

$$\int [f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)]\,dx = \int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx + \ldots + \int f_n(x)\,dx$$

Integrali indefiniti fondamentali

$$\int f'(x)\,dx = f(x) + c$$

$$\int a\,dx = ax + c$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c\text{ , con } n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \log|x| + c$$

Integrali notevoli

$$\int \frac{1}{\mathrm{senx}} dx = \log\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right| + c$$

$$\int \frac{1}{\cos x} dx = \log\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right| + c$$

Unexpected text node: 'o'

Unexpected text node: 'o'

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \mathrm{arctg}x + c$$

ESEMPIO

Derivata

- Consideriamo ad esempio la funzione

  $f(x) = 2x^3 + 6x^2 - 12x + 4$

=B2+$A$2

A	B
dx	x
0.1	-5
	-4.9

Derivata

- E dunque trascianiamo fino a 102 ottendo:

5		3.3	
6		3.4	
7		3.5	
8		3.6	
9		3.7	
0		3.8	
1		3.9	
2		4	
3		4.1	
4		4.2	
5		4.3	
6		4.4	
7		4.5	
8		4.6	
9		4.7	
0		4.8	
1		4.9	
2		5	
3			
4			
5			

Derivata

- Adesso calcoliamo il valore di Y

=2*B2^3 + 6*B2^2 - 12*B2 + 4

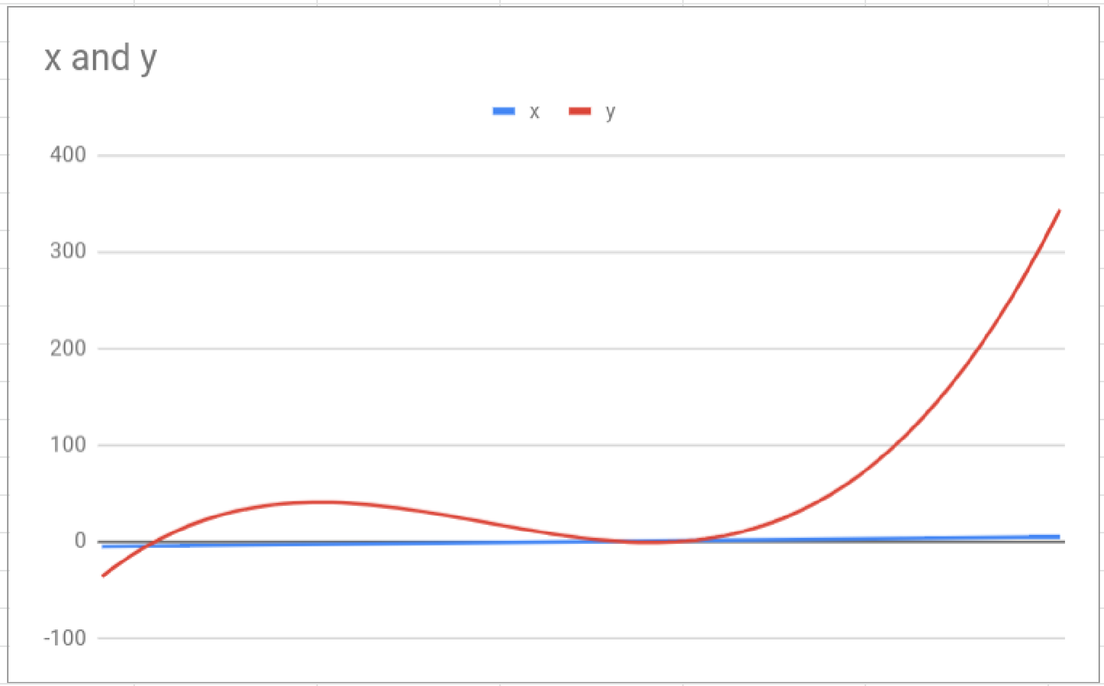
	A	B	C
1	dx	x	y
2	0.1	-5	-36
3		-4.9	-28.438
4		-4.8	-21.344
5		-4.7	-14.706

Derivata

- Possiamo dunque graficare

```
=2*B2^3 + 6*B2^2 - 12*B2 + 4
```

	A	B	C
1	dx	x	y
2	0.1	-5	-36
		-4.9	-28.438
		-4.8	-21.344
		-4.7	-14.706
		-4.6	-8.512
		-4.5	-2.75
		-4.4	2.592
		-4.3	7.526
		-4.2	12.064
		-4.1	16.218
		-4	20
		-3.9	23.422
		-3.8	26.496
		-3.7	29.234
		-3.6	31.648
		-3.5	33.75
		-3.4	35.552
		-3.3	37.066
		-3.2	38.304
		-3.1	39.278
		-3	40
		-2.9	40.482



Derivata

- Possiamo calcolare la derivata semplicemente usando la formula:

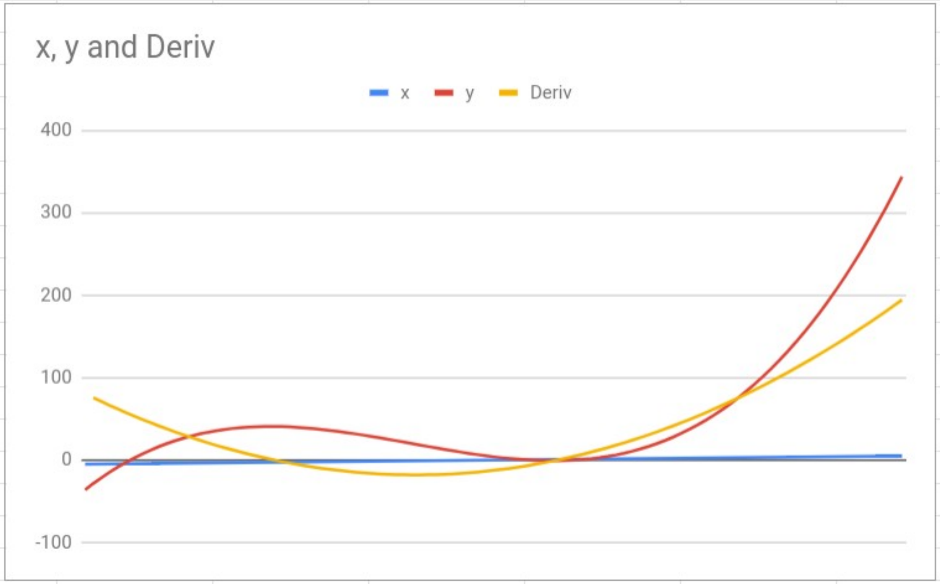
=(C3-C2)/$A$2

	A	B	C	D
	dx	x	y	Deriv
	0.1	-5	-36	
		-4.9	-28.438	75.62
		-4.8	-21.344	70.94

Derivata

- E quindi possiamo plottare funzione e derivata assieme

dx	x	y	Deriv
0.1	-5	-36	
	-4.9	-28.438	75.62
	-4.8	-21.344	70.94
	-4.7	-14.706	66.38
	-4.6	-8.512	61.94
	-4.5	-2.75	57.62
	-4.4	2.592	53.42
	-4.3	7.526	49.34
	-4.2	12.064	45.38
	-4.1	16.218	41.54
	-4	20	37.82
	-3.9	23.422	34.22
	-3.8	26.496	30.74
	-3.7	29.234	27.38
	-3.6	31.648	24.14
	-3.5	33.75	21.02
	-3.4	35.552	18.02
	-3.3	37.066	15.14
	-3.2	38.304	12.38
	-3.1	39.278	9.74



Derivata

- Facile fare una verifica usando la derivata analitica

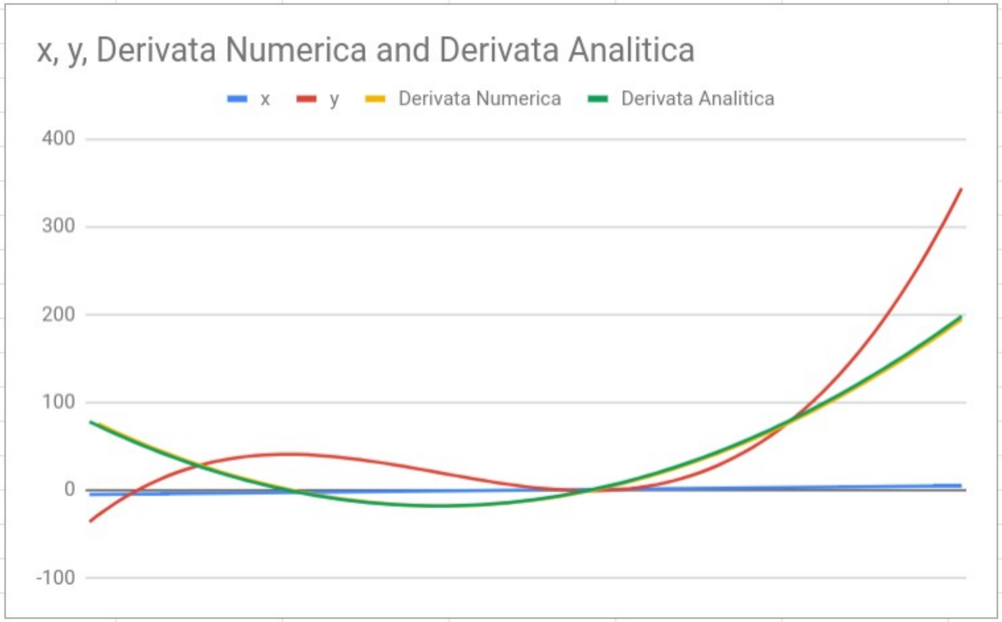
`=(B2^2)*6 + 12*B2-12`

A	B	C	D	E
dx	x	y	Derivata Numerica	Derivata Analitica
0.1	-5	-36		78
	-4.9	-28.438	75.62	73.26
	-4.8	-21.344	70.04	68.64

Derivata

- Facile fare una verifica usando la derivata analitica

x	y	Derivata Numerica	Derivata Analitica
-5	-36		78
-4.9	-28.438	75.62	73.26
-4.8	-21.344	70.94	68.64
-4.7	-14.706	66.38	64.14
-4.6	-8.512	61.94	59.76
-4.5	-2.75	57.62	55.5
-4.4	2.592	53.42	51.36
-4.3	7.526	49.34	47.34
-4.2	12.064	45.38	43.44
-4.1	16.218	41.54	39.66
-4	20	37.82	36
-3.9	23.422	34.22	32.46
-3.8	26.496	30.74	29.04
-3.7	29.234	27.38	25.74
-3.6	31.648	24.14	22.56
-3.5	33.75	21.02	19.5
-3.4	35.552	18.02	16.56
-3.3	37.066	15.14	13.74
-3.2	38.304	12.38	11.04
-3.1	39.278	9.74	8.46



Integrale

- Abbiamo detto che calcolare l’integrale definitoi corrisponde al calcolo dell’area sottesta sotto la curva
- Trovare l'area usando un metodo di approssimazione noto come somme di Riemann. Fondamentalmente stiamo disegnando molti di rettangoli che approssimano la forma della nostra curva. Se sommiamo l'area di ciascun rettangolo, conosciamo (più o meno) l'area sotto la curva.

Integrale

- Possiamo dunque determinare l’area di ogni rettangolo

fx =C2*$A$2

	A	B	C	D	E	F
1	dx	x	y	Derivata Numerica	Derivata Analitica	
2	0.1	-5	-36		78	-3.6
3		-4.9	-28.438	75.62	73.26	

Integrale

- Ed a seguire banalmente la sommatoria delle aree dei rettangoli

100% $ % .0 .00 123 Def

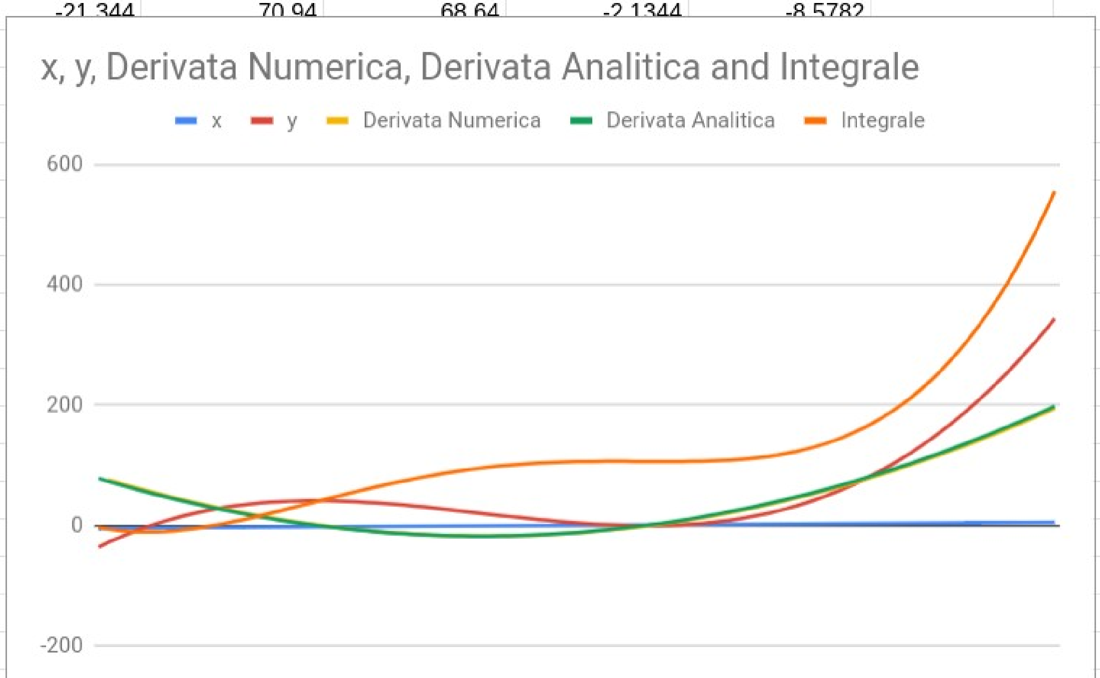
fx =SUM($F$2:F3)

	E	F	G	H
1	Deriv Analitica		Integrale	
2	78	-3.6	-3.6	
3	73.26	-2.8438	-6.4438	
4	68.64	-2.1344		
5	64.14	-1.4706		
6	59.76	-0.8512		
7	55.5	-0.275		
8	51.36	0.2592		
9	47.34	0.7526		

Integrale

- E dunque l’integrale ad esempio

x	y	Derivata Numerica	Derivata Analitica		Integrale
-5	-36		78	-3.6	-3.6
-4.9	-28.438	75.62	73.26	-2.8438	-6.4438
-4.8	-21.344	70.94	68.64	-2.1344	-8.5782
-4.7					
-4.6					
-4.5					
-4.4					
-4.3					
-4.2					
-4.1					
-4					
-3.9					
-3.8					
-3.7					
-3.6					
-3.5					
-3.4					
-3.3					
-3.2					
-3.1					
-3					
-2.9	40.482	4.82	3.66	4.0482	32.1882
-2.8	40.736	2.54	1.44	4.0736	36.2618



Integrale

- Vediamo ad esempio il calcolo dell'integrale definito

$$\int_{-2}^{3} (2x^3 + 6x^2 - 12x + 4)dx$$

94.575

-3.6 =G82-G32

```
function integrale(input)
{
  return ((2.0/4.0)*Math.pow(input, 4.0) +
    (6.0/3.0)*Math.pow(input, 3.0) -
      (12.0/2.0)*Math.pow(input,2.0)+4.0*input);
}
```

=integrale(3)-integrale(-2)

A	B

Analitico
92.5

TEST

Test

- Calcolare la derivata di f(x) = x^2 + 2 Punto per punto e

$$\int_{-3}^{3} \left(x^2 + 2\right) \mathrm{d}x$$